$$E_n = \sum_m e_n^2(m)$$ ... energija rezidualnog signala (predikcijske pog.)

Da li je moguće naći E_n na osnovu $\Phi_n(i,k)$, i opt. prediktora $\alpha_1 \dots \alpha_p$?

koef. sust. jedn.

$$\boxed{E_n = \Phi_n(0,0) - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Phi_n(0,i)}$$

da posti. učinak predikcije

mora $\Phi_n(0,i) \neq 0$

$\Rightarrow$ signal mora kit. obojenog spektra

$$\Phi_n(i,k) = \sum_m s_n(m-i)\, s_n(m-k)$$

za $i=k=0$ $\quad \Phi_n(0,0) = \sum_m s_n^2(m)$ .... energija pulaznog signala.

Izraz koji određuje opt. α_i:

$$\sum_{k=1}^{P} \alpha_k \Phi_n(i,k) = \Phi_n(i,0) \quad \dots \quad \text{za } i=1,2\dots P$$

$$E_n = \sum_m e_n^2(m) = \sum_m \left(s_n(m) - \tilde{s}_n(m)\right)^2 = \sum_m \left(s_n(m) - \sum_{k=1}^{P} \alpha_k s_n(m-k)\right)^2$$

$$= \sum_m s_n^2(m) - 2\sum_{k=1}^{P} \alpha_k \underbrace{\sum_m s_n(m) s_n(m-k)}_{\Phi_n(0,k) = \Phi_n(k,0)} + \sum_m \left(\sum_{k=1}^{P} \alpha_k s_n(m-k)\right)^2$$

$$\sum_m \left(\sum_{k=1}^{P} \alpha_k s_n(m-k)\right)^2 =$$

$$\left(\alpha_1 s_n(m-1) \dots \alpha_p s_n(m-p)\right)^2$$

aa ab ac
ba bb bc
ca cb cc

$$(a+b+c)^2 = a \cdot a + b \cdot b + cc$$
$$2a \cdot b + 2a \cdot c + 2bc =$$
$$= \left(\begin{matrix} 2a \cdot a + 2bb + 2cc \\ + 2ab + 2ac + 2bc \end{matrix}\right) - a \cdot a - bb - cc$$

$$\left(\sum_{i=1}^{P} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{P} a_i a_j$$

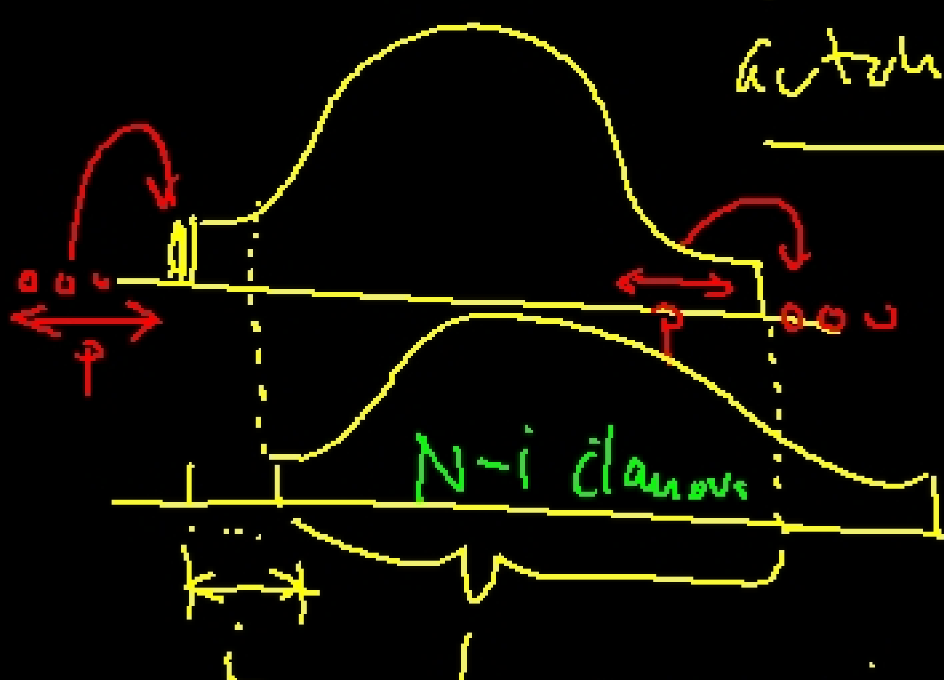
Spec. u slučaju autokor. post.

$$\Phi_n(i,k) = R_n(|i-k|)$$

$$E_n = \Phi_n(0,0) - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \Phi_n(i,0)$$

$$\boxed{E_n = R(0) - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i R(i)}$$

za metodu autokorelacije



Samo ovi uzorci sudjeluju u izračunavanju $R(i)$

Za metodu kovarijance

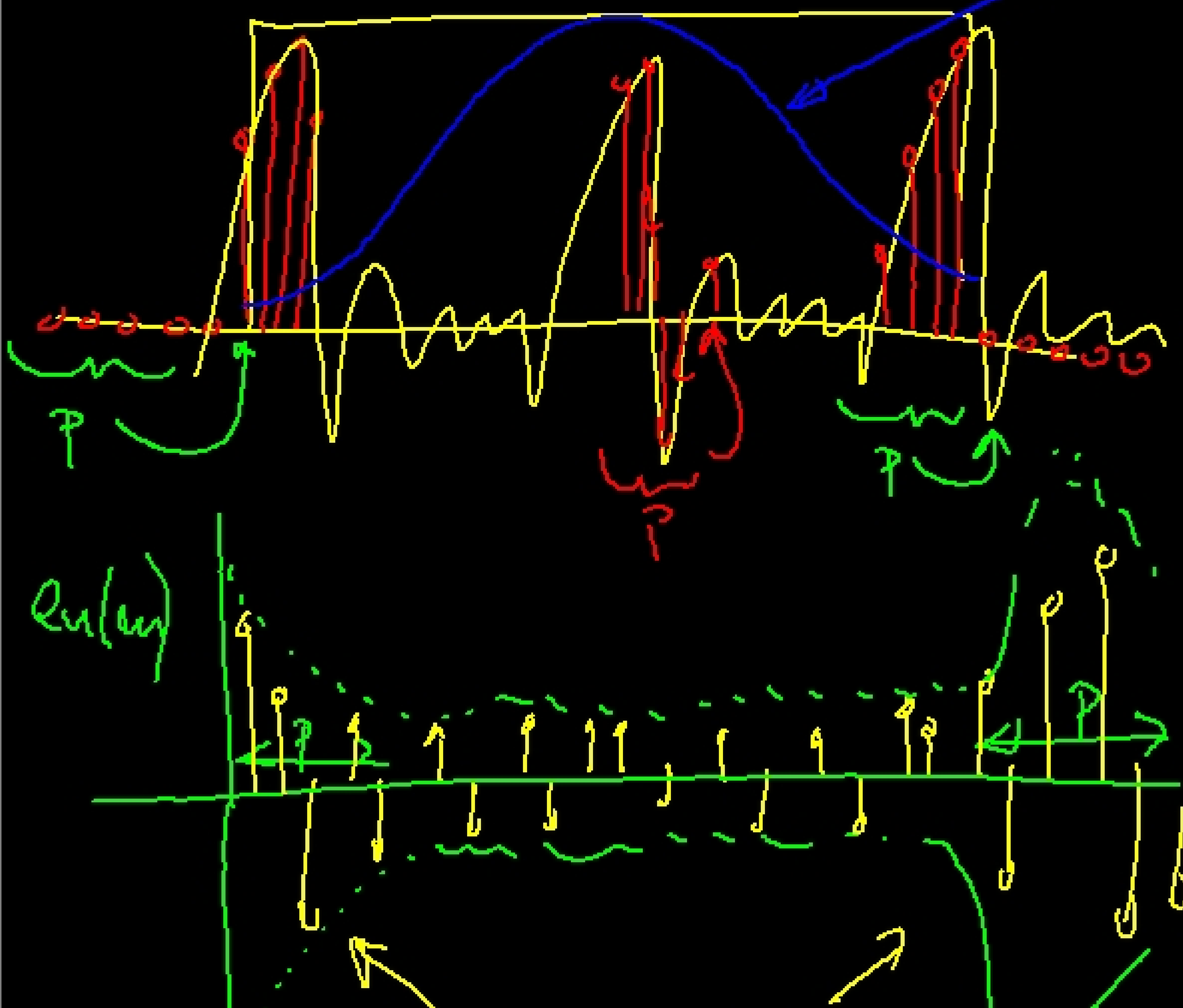
$\Rightarrow$ ne koristimo vrem. otvor nego fiksiramo raspon sumiranja po m.

$$E_n = \sum_{m=0}^{N-1} e_n^2(m), \quad \Phi_n(i,k) = \sum_{m=0}^{N-1} s_n(m-i)\, s_n(m-k)$$

U slučaju da koristimo pravokutni otvor uz metodu autokor.

tapering window

Hammingov otv.



Zato ... prigušujemo signal na rubovima tako, da i pogreška bude manja i da manje utječe na pred.

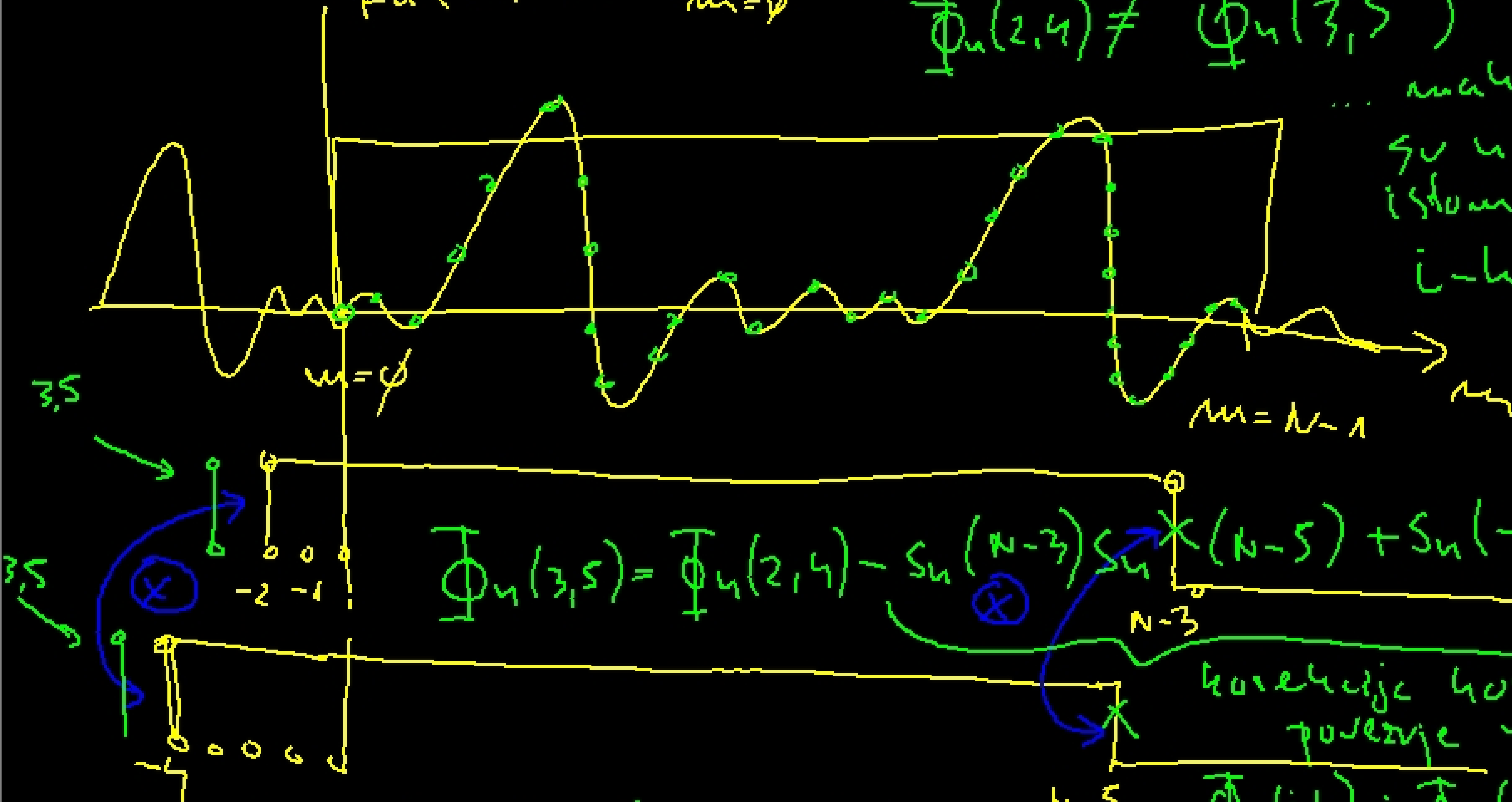
$$\underset{i=1..p}{\alpha_i} = \arg\min\left(E_n(\alpha_i)\right)$$

ima značajnu energiju na rubovima.

$$\Phi_u(2,4) = \sum_{m=0}^{N-1} s_u(m-2)\, s_u(m-4)$$

$$\Phi_u(2,4) \neq \Phi_u(3,5)$$

... makar su na istom razm. i-k



$$\Phi_u(3,5) = \Phi_u(2,4) \underbrace{- s_u(N-3)\, s_u(N-5) + s_u(-3)\, s_u(-5)}_{\text{korelacije koja povezuje } \Phi_u(i,k) \text{ i } \Phi_u(i+1,k+1)}$$

Za razliku od autokor. metode

Suma po m za $\Phi_u(i,k)$ uvijek ima N članova

Kod metode kovarijance
ne ograničavamo signal u vrem.

$\Rightarrow$ samo ograničavamo raspon sumacije $e_n(m)$

$$E_n = \sum_{0}^{N-1} e_n^2(m)$$

$$\Phi_n(p,\phi) = \sum_{m=\phi}^{N-1} s_n(m-p)\, s_n(m)$$

prvi član

$s_n(-p) \cdot s_n(\phi)$

blok koji analiziram, ali

za izračun prediktcijske pogreške koristimo i p uzoraka i prošlog bloka, jer tako traže izrazi za $\Phi_n(i,k)$

$$\Phi_n(i,k) = \Phi_n(k,i)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi_n(1,1) & \cdots & \Phi_n(1,p) \\ \vdots & & \\ \Phi_n(p,1) & \cdots & \Phi_n(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_n(1,\phi) \\ \vdots \\ \Phi_n(p,\phi) \end{bmatrix}$$

$\Phi_n(1,1)$ ... energija s/j. na rasponu $m = -1 \ldots N-2$

$\phantom{\Phi_n(1,1) \text{ ... energija s/j. na rasponu } m =} -2 \quad N-3$

$\Phi_n(2,2)$ ... —"—

$$\underbrace{\Phi_n(1,1) \neq \Phi_n(2,2)}_{\text{slično } \Phi_n(0,0)} \neq \underbrace{\Phi_n(0,0)}_{\text{prava en. s/j.}} = R(0)$$

Za velike N i pravokutni otvor $R(|i-k|) \cong \Phi_n(i,k)$

Za male N ... metoda $\underbrace{\text{kov. je točnija}}_{}$ od met. autokor.

rezanje signala kod metode autokor.

uzrokuje pogreške u predikl.

$\Rightarrow$ razlog korištenja Autokor. posl. (umjesto kov. koja je toč.)

je u stabilnosti!

Svojstvo... optimalni pred. nađen aut. post.

uvijek daje stabilni $H(z)$

korijeni inv. filtra $A(z)$ su unutar jed. kr.

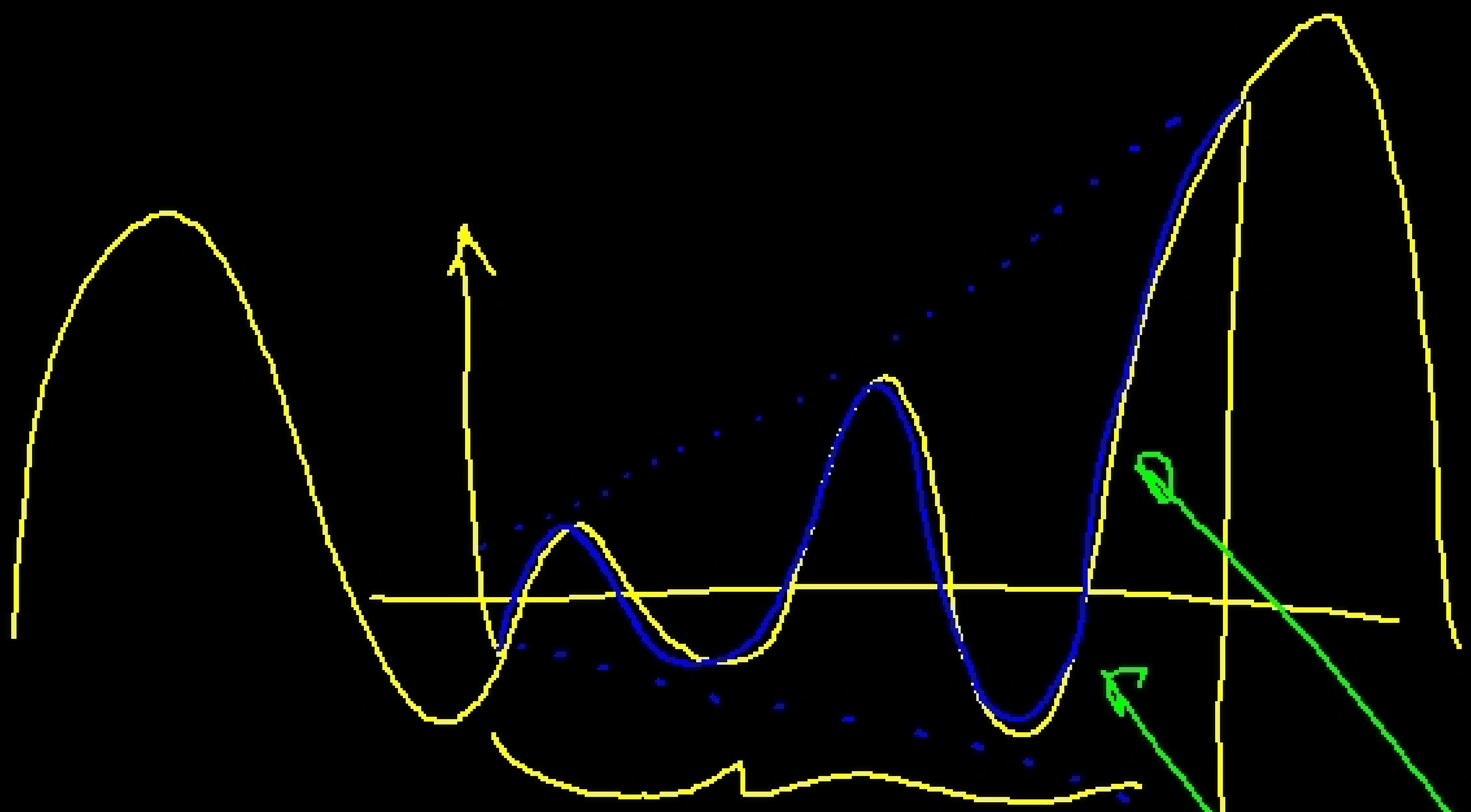
$$A(z) = 1 \underbrace{- \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} \dots - \alpha_p z^{-p}}_{-P(z) \;\dots\; \text{predik.}} \quad \text{inv. filtar}$$

$$= (1 - z_{01} z^{-1})(1 - z_{02} z^{-1}) \dots (1 - z_{0p} z^{-1})$$

$$|z_{0i}| < 1 \qquad i = 1, p$$

Za metodu kov. to ne vrijedi.

$\Rightarrow$ u kojim slučajevima dolazi do pojave nestabilnosti $H(z)$



opt. predikt za ovaj raspon m.

tipični primjer odziva nestabilnog sustava.

model $H(z)$... sustav koji na jediničnu pobudu daje odziv

$\Rightarrow$ odziv je rastući...

... sustav (model) nestabilan.

do nestabilnosti dolazi kod segmenata u kojima se sig. raspituje.

Kako izračunati el. mat. sustava i slob. stupac kod metode kov.?

prvi stupac od Φ

drugi stup. od Φ

$\Phi_n(2,1) = \Phi_n(1,2)$ simetr.

simetr.

$p+1$ član

slob. stup.

$$
\left[\begin{array}{c|cccc}
\Phi_n(0,0) & & & & \\
\Phi_n(1,0) & \Phi_n(1,1) & & & \\
\vdots & \Phi_n(2,1) & \Phi_n(2,2) & & \\
\vdots & & \Phi_n(3,2) & \ddots & \\
\Phi_n(p-1,0) & & & & \\
\Phi_n(p,0) & \Phi_n(p,1) & \Phi_n(p,2) & & \Phi_n(p,p)
\end{array}\right]
$$

odredim pomoću osnovnog izraza

$$\Phi_n(i,0) = \underbrace{\sum_{m=0}^{N-1} s_n(m)\, s_n(m-i)}_{(p+1)\times N \text{ množ.}\quad (p+1)(N-1) \text{ zbr.}}$$

$i = 0 \dots p$

sve članove matrice Φ računamo u rekurzionim izrazom.

na osnovu $\Phi_k(i,0)$ .. uz $i = 0 .. P$

složenost izračuna je slična kao za $R(0) .. R(P)$

$$\Phi_k(i+1,k+1) = \underbrace{\Phi_k(i,k) + s_k(-i-1)\,s_k(-k-1) - s_k(N-1-i)\,s_k(N-1-k)}$$

2 mn. i 2 z za svaki član donje trokutaste mat. Φ

$P \sim 10$

$N \sim 200-300$

ukupno članova u Φ ima P^2

ne ovisi o N nego samo o P.

Vilahovit postupak za izračun
prediktora za autoreg. post.

Durbinov rekurzivni postupak.

Levinson, Robinson, Durbin.

$$i = 1, p \qquad \sum_{k=1}^{p} \alpha_k R(|i-k|) = R(i)$$

Toeplitz. mat.

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p-1) \\ R(1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & R(1) \\ R(p-1) & \cdots & R(1) & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ \vdots \\ R(p) \end{bmatrix}$$

kroz iteracije tog postupka

tražimo rješenja (opt. pred.) i pripadnu pogrešku

E_n za sve stupnjeve pred. od $\phi \dots p$

$E_n^{(\phi)}$ — poj. pred. pred. ϕ-tog reda $\dots = R(\phi)$

pred. 1. reda $[\alpha_1^{(1)}]$ $\quad A^{(1)}(z) = 1 - \alpha_1^{(1)} z^{-1}$

daje pogrešku $E_n^{(1)}$

pred. 2. reda $[\alpha_1^{(2)} \; \alpha_2^{(2)}]$ $\quad A^{(2)}(z) = 1 - \alpha_1^{(2)} z^{-1} - \alpha_2^{(2)} z^{-2}$

daje poj. $E_n^{(2)}$

$\vdots \Downarrow$ idemo do p $\quad [\alpha_1^{(p)} \dots \alpha_p^{(p)}]$ i $E_n^{(p)}$

izbacili smo ind. n.

$$E^{(0)} = R(0)$$

$$\left[\, k_i = \left(R(i) - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j^{(i-1)} R(i-j)\right) \Big/ E^{(i-1)} \right.$$

npr. za $i=1$ $\quad k_1 = R(1) / R(0)$ koef. pred. prošlog reda

za $i=2$ $\quad k_2 = \left(R(2) - \alpha_1^{(2-1)} \cdot R(1)\right) / E^{(1)}$

$$\left[\, E^{(i)} = E^{(i-1)} \cdot (1 - k_i^2) \,\right]$$

$$\left[\, \alpha_i^{(i)} = k_i \right.$$

$$\left. j = 1 \ldots i-1 \quad \alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-j}^{(i-1)} \,\right]$$

dižemo red od 1 .... do p.

Slowest algorithm

$$O(p^2) = \underbrace{ap^2 + bp + c}$$

Order